Escuela Superior de Apan

PRECÁLCULO

Licenciatura en Ingeniería en Nanotecnología

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES – SUMA Y MULTIPLICACIÓN

Profesores

Arturo Hernández Hernández

Luis Alberto Hernández Hernández

INTRODUCCIÓN

Las operaciones fundamentales son consideradas como uno de los pilares de las matemáticas, debido a que son la base para la construcción del cálculo, el álgebra, la geometría y la trigonometría. Convencionalmente se considera que las operaciones fundamentales se integran por las siguientes cuatro operaciones: la suma, la resta, la multiplicación y la división. Sin embargo, esto puede restringirse a la comprensión de la suma y la multiplicación, comprendiendo las propiedades que las rigen. Para ello debemos entender que las propiedades de las operaciones fundamentales son aquellas reglas que nos permiten simplificar y manipular expresiones matemáticas, las cuales se encuentran constituidas por las propiedades conmutativa, asociativa, cancelativa, así como de los elementos identidad e inverso. Además, se integra la propiedad distributiva que vincula las operaciones fundamentales de la suma y la multiplicación.

OBJETIVO

Lograr una mejor comprensión y dominio de aplicación de las operaciones fundamentales suma y multiplicación, así como de sus correspondientes propiedades conmutativa, asociativa, cancelativa, así como de los elementos identidad e inverso, además de la propiedad distributiva. Lo antes mencionado se logra a través de la revisión de algunos ejemplos básicos de estas propiedades así como de su integración y aplicación en ejemplos de mayor nivel de dificultad a fin de simplificar el proceso de resolución de estos problemas.

PALABRAS CLAVE: Propiedades de las operaciones, suma, multiplicación

OPERACIÓN FUNDAMENTAL	
SUMA	La suma o adición consiste en añadir elementos $(a, b, c, d, \ldots)$ de la misma especie a fin de obtener una cantidad total (S)
$\boldsymbol{a+b=S}$	
PROPIEDADES DE LA SUMA	
CONMUTATIVA	El orden de los elementos en una suma no afecta el resultado (R)
Si $a+b=R$ y $b+a=R$, entonces se tendrá que $\boldsymbol{a+b=b+a}$	
ASOCIATIVA	Los elementos de una suma pueden agruparse de cualquier forma sin que esto afecte el resultado
Si $(a+b)+c=d+c=S$ y $a+(b+c)=a+e=S$, entonces se tendrá que $\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)}$	
CANCELATIVA	Dos sumas cuyos elementos añadidos difieren únicamente para cada una de ellas en un único elemento, pero con el mismo resultado, implican la igualdad de dichos elementos
Si $a+b=S$ y $a+c=S$, entonces se tendrá que $\boldsymbol{b=c}$	
IDENTIDAD	La adición del elemento neutro o identidad aditivo (0) no modifica a un elemento
$\boldsymbol{a+0=a}$	
INVERSO	La adición del elemento inverso aditivo $(-a)$ a un elemento da como resultado el elemento identidad
$\boldsymbol{a+(-a)=0}$	

EJEMPLOS	
SUMA	$a+b=S$

1. Sean los elementos $1,3,5,7,11,13$

$$1+3=4$$
$$1+3+5=9$$
$$1+3+5+7=16$$
$$1+3+5+7+11=27$$
$$1+3+5+7+11+13=40$$

2. Sean los elementos a, b, c

$$a+b+b+c+c+c=a+2b+3c$$
$$a+a+a+b+c=3a+b+c$$
$$a+b+b+b+b+c+c=a+4b+2c$$

PROPIEDADES DE LA SUMA

CONMUTATIVA — $a + b = b + a$

1. Sean los elementos $1,3,5,7,11,13$

$$1 + 3 = 4 = 3 + 1$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 5 + 3 + 1$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 7 + 5 + 3 + 1$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 11 = 27 = 11 + 7 + 5 + 3 + 1$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 40 = 13 + 11 + 7 + 5 + 3 + 1$$

2. Sean los elementos a, b, c

$$a + b + b + c + c + c = a + 2b + 3c = c + c + c + b + b + a$$
$$a + a + a + b + c = 3a + b + c = c + b + a + a + a$$
$$a + b + b + b + b + c + c = a + 4b + 2c = c + c + b + b + b + b + a$$

ASOCIATIVA — $(a + b) + c = a + (b + c)$

1. Sean los elementos $1,3,5,7,11,13$

$$(1 + 3) + 5 = 4 + 5 = 9 = 1 + (3 + 5) = 1 + 8$$
$$(1 + 3 + 5) + 7 = 9 + 7 = 16 = 1 + (3 + 5 + 7) = 1 + 15$$
$$(1 + 3 + 5 + 7) + 11 = 16 + 11 = 27 = 1 + (3 + 5 + 7 + 11) = 1 + 26$$

2. Sean los elementos a, b, c

$$a + (b + b + c) + c + c = a + 2b + c + c + c = a + 2b + 3c = a + b + (b + c + c) + c$$
$$= a + b + b + 2c + c$$

CANCELATIVA — $b = c$

Sean los elementos $1,3,4,7, a, b$

1. Si $1 + 3 + a + 7 = 19$ y $4 + b + 7 = 19$ tenemos que

$$(1 + 3) + a + 7 = 4 + a + 7 = 11 + a = 19$$
$$4 + b + 7 = 11 + b = 19$$

Por lo que

$$11 + a = 19 = 11 + b$$

Por tanto

$$a = b$$

2. Si $1 + a + 3 + a + 7 + a = 23$ y $1 + 2b + 10 + b = 23$tenemos que

$$1 + a + 3 + a + 7 + a = (1 + 3 + 7) + (a + a + a) = 11 + 3a = 23$$
$$1 + 2b + 10 + b = (1 + 10) + (2b + b) = 11 + 3b = 23$$

Por lo que

$$11 + 3a = 23 = 11 + 3b$$

Por tanto

$$3a = 3b$$

Y por consiguiente

$$a = b$$

IDENTIDAD — $a + 0 = a$

1. Sean los elementos $7,19$

$$7 + 0 = 7$$
$$7 + 19 + 0 = 26 + 0 = 26$$

2. Sean los elementos a, b

$$a + 0 = a$$
$$7b + 0 = 7b$$

INVERSO	$a + (-a) = 0$

1. Sean los elementos $3,11,14,19,33$

$$3 + 11 + (-14) = (14) + (-14) = 14 + (-14) = 0$$
$$3 + 11 + (-33) + 19 = (14) + (-33) + 19 = (14 + 19) + (-33) = 33 + (-33) = 0$$

2. Sean los elementos a, b

$$7a + (-7a) = 0$$
$$3a + 9b + (-9b) = 3a + 0 = 3a$$
$$a + 7b + (-3a) + 2a = (a + 2a) + 7b + (-3a) = 7b + 3a + (-3a) = 7b + 0 = 7b$$

OPERACIÓN FUNDAMENTAL	
MULTIPLICACIÓN	La multiplicación consiste en sumar un elemento $(a, b, c, d, \ldots)$ tantas veces como sea indicado por otro elemento denominado factor $(A, B, C, D, \ldots)$ a fin de obtener una cantidad total denominada producto (P)
$$\boldsymbol{Ab = ab = P}$$	
PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN	
CONMUTATIVA	El orden de los factores en una multiplicación no afecta el producto (P), es decir, si los elementos y los factores son de la misma especie un elemento puede ser considerado factor o viceversa.
Si $A \cdot b = P$ y $b \cdot A = P$, entonces se tendrá que $$\boldsymbol{Ab = ab = ba = bA}$$	
ASOCIATIVA	Los elementos de una multiplicación pueden agruparse de cualquier forma sin que esto afecte el producto
Si a· $(b \cdot c) = P$ y $(a \cdot b) \cdot c = P$, entonces se tendrá que $$\boldsymbol{a(bc) = (ab)c}$$	
CANCELATIVA	Dos multiplicaciones cuyos factores difieren únicamente en uno de sus elementos, pero con el mismo producto, implican la igualdad de dichos factores
Si a· $b \cdot c = P$ y $a \cdot b \cdot d = P$, entonces se tendrá que $$\boldsymbol{c = d}$$	
IDENTIDAD	La multiplicación por el elemento neutro o identidad multiplicativo (1) no modifica al factor
$$\boldsymbol{a(1) = a}$$	
INVERSO	La multiplicación del elemento inverso multiplicativo $(1/a)$ a un elemento da como resultado el elemento identidad.
$$\boldsymbol{a\left(\frac{1}{a}\right) = 1}$$	

EJEMPLOS	
MULTIPLICACIÓN	$Ab = ab = P$
1. Sean los elementos $1,3,5,7,11,13$ $$3(5) = 5 + 5 + 5 = 15$$ $$5(7) = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$$ $$3(11) = 11 + 11 + 11 = 33$$	

2. Sean los elementos $3,7,a,b$

$$3a = a + a + a = 3a$$
$$7b = b + b + b + b + b + b + b = 7b$$
$$ab = ab$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN	
CONMUTATIVA	$a \cdot b = b \cdot a$

1. Sean los elementos $3,5,11,13$

$$3(5) = 15 = 5(3)$$
$$11(13) = 143 = 13(11)$$
$$5(13) = 65 = 13(5)$$
$$3(5)(11) = 165 = 11(5)(3)$$
$$3(5)(11)(13) = 2145 = 13(11)(5)(3)$$

2. Sean los elementos $3,11,a,b$

$$3a = a(3)$$
$$11b = b(11)$$
$$3(11)a = 33a = a(11)(3)$$
$$3(11)ab = 33ab = b(a)(3)(11)$$

ASOCIATIVA	$a[(b)(c)] = [(a)(b)]c$

1. Sean los elementos $3,7,11,13$

$$[(3)(7)]11 = 21(11) = 231 = 3[(7)(11)] = 3(77)$$
$$[(3)(7)(11)]13 = 231 \cdot 13 = 3003 = 3[(7)(11)(13)] = 3(1001)$$
$$3[(7)(11)]13 = 3(77)13 = 3003 = 3(7)[(11)(13)] = 3(7)(143)$$

2. Sean los elementos $7,13,a,b$

$$7[13(a)] = 7(13a) = 91a = [7(13)]a = 91(a)$$
$$[7(b)][13(a)] = 7b(13a) = 91ab = [7(13)][a(b)] = 91(ab)$$

CANCELATIVA	$b = c$

Sean los elementos $7,19,a,b,c,d$

Si $7(a)(19)(b) = 133ab = P$ y $a(7)(c)(19) = 133ac = P$tenemos que

$$133ab = P = 133ac$$

Por lo que

$$133ab = 133ac$$

Por tanto

$$ab = ac$$

Y por consiguiente

$$b = c$$

IDENTIDAD	$a(1) = a$

1. Sean los elementos 3,7,13

$$[(3)(7)](1) = 21(1)$$
$$[(3)(7)(13)](1) = 273(1) = 273$$

2. Sean los elementos $3,13,a,b$

$$[(3)(13)](a)(1) = 39(a)(1) = 39a$$
$$13[(a)(b)](1) = 13(ab)(1) = 13ab$$

INVERSO	$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$

1. Sean los elementos $19,33,627$

$$19\left(\frac{1}{19}\right)=\frac{19}{19}=1$$

$$19(33)\left(\frac{1}{627}\right)=627\left(\frac{1}{627}\right)=\frac{627}{627}=1$$

2. Sean los elementos $19,33,627,a,b$

$$19(a)\left(\frac{1}{19a}\right)=\frac{19a}{19a}=1$$

$$19(33)(b)\left(\frac{1}{627b}\right)=627b\cdot\left(\frac{1}{627b}\right)=\frac{627b}{627b}=1$$

$$33(a)(b)\left(\frac{1}{33ab}\right)=33(ab)\left(\frac{1}{33ab}\right)=\frac{33ab}{33ab}=1$$

OTRAS PROPIEDADES	
DISTRIBUTIVA	Combina las operaciones de adición y multiplicación, haciendo uso de la propiedad asociativa de la suma

$$a(b+c)=ab+ac$$

EJEMPLOS	
DISTRIBUTIVA	$a(b+c)=ab+ac$

1. Sean los elementos $7,17,37$

$$7(17+37)=7(17)+7(37)=119+259=378=7(54)$$

2. Sean los elementos $3,a,b,c$

$$3(a+b)=3(a)+3(b)=3a+3b$$
$$a(3+b)=a(3)+a(b)=3a+ab$$
$$(3+a)(b+c)=(3+a)(b)+(3+a)(c)=3(b)+a(b)+3(c)+a(c)=3b+3c+ab+ac$$

APLICACIONES GENERALES
Completar expresiones para resolver problemas

Determine el valor de la incógnita dada la siguiente expresión

$$x^2 = 4x - 2$$

Para dar solución podemos reescribir la expresión de la forma

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

Esta expresión puede asociarse con un binomio cuadrado asociado con $x - 2$, sin embargo, la expresión no está completa, dado que

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Donde se identifica que para completar la expresión sería necesario sumar $+2$, pero para no modificar la expresión podemos hacer uso del elemento identidad de la suma, es decir, sumar un cero a la expresión pero haciendo uso del inverso aditivo, en este caso

$$2 + (-2) = 0$$

De esta manera tendremos podemos reescribir la expresión como

$$x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 2 + 0 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 + [2 + (-2)] = 0$$

Donde haciendo uso de la propiedad asociativa de la suma tendremos que

$$(x^2 - 4x + 4) - 2 = 0$$

$$(x-2)^2 - 2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 2$$

Por tanto

$$x - 2 = \sqrt{2}$$

Así pues la solución está dada por

$$x = 2 + \sqrt{2}$$

APLICACIONES GENERALES
Completar expresiones para resolver problemas

Determine el límite de la siguiente expresión

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 7x}{3x^2 + 5x + 8}$$

Al evaluar el límite de esta expresión se establece una indeterminación, por lo que es necesario reescribir la expresión a evaluar. Para ello podemos hacer uso del elemento identidad multiplicativo a través del inverso multiplicativo, en este caso

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

Para dar solución podemos reescribir la expresión de la forma

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 7x}{3x^2 + 5x + 8} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)\left(\frac{x^2 + 7x}{3x^2 + 5x + 8}\right)$$

Lo cual al hacer uso de las propiedades asociativa de la multiplicación así como distributiva, tendremos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)(x^2 + 7x)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)(3x^2 + 5x + 8)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + 7x\left(\frac{1}{x^2}\right)}{3x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + 5x\left(\frac{1}{x^2}\right) + 8\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{7}{x}}{3 + \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

De esta manera tendremos una expresión equivalente que puede ser evaluada, de manera tal que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 7x}{3x^2 + 5x + 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{7}{x}}{3 + \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

CONCLUSIONES

A través de la revisión de este contenido se logra evidenciar que el dominio de conceptos básicos de la disciplina permite simplificar la resolución de problemas con un mayor nivel de dificultad, asimismo permite reforzar el conocimiento de las bases de la matemática a través del estudio de algunos tópicos que frecuentemente no se encuentran en los contenidos curriculares y que promueven el fortalecimiento de las habilidades en estudiantes de cualquier nivel educativo.

REFERENCIAS

[1] Zill, D.G., Dewar, & J.M., Villarreal (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. McGraw-Hill Interamericana.

[2] Spiegel, M.R., & Moyer R.E. (2015). *Álgebra superior*. McGraw-Hill Interamericana.