



Escuela Superior  
de Apan

# PRECÁLCULO

Licenciatura en Ingeniería en Nanotecnología

EL TRIÁNGULO DE PASCAL Y LA EXPANSIÓN BINOMIAL

Profesores

Arturo Hernández Hernández

Luis Alberto Hernández Hernández

## INTRODUCCIÓN

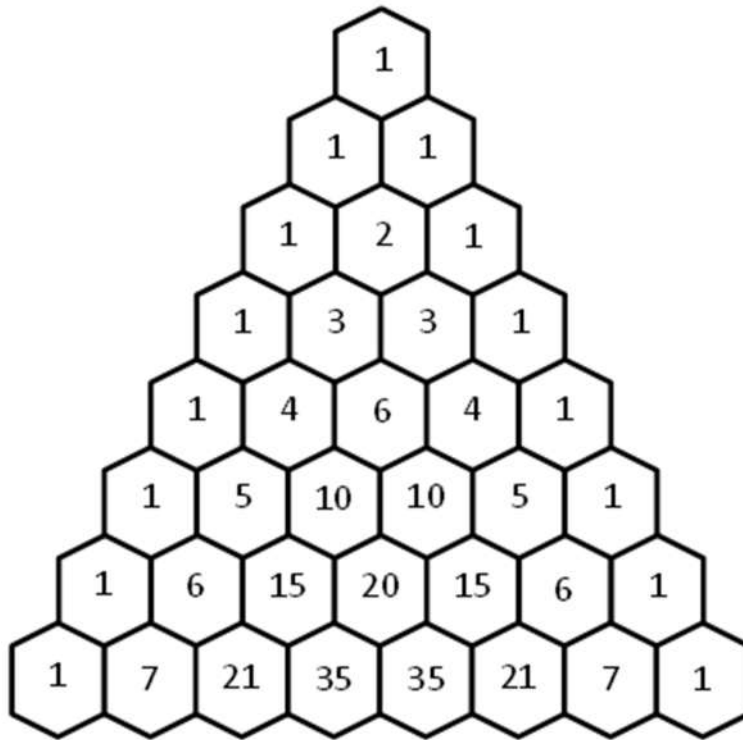
El triángulo de Pascal es una construcción matemática en forma de pirámide, que es empleada en la teoría de probabilidad, la combinatoria y el álgebra. Este elemento resulta particularmente útil para la expansión binomial y el cálculo de coeficientes binomiales, así como para la construcción de polinomios que se encuentra basado en la expansión binomial.

## OBJETIVO

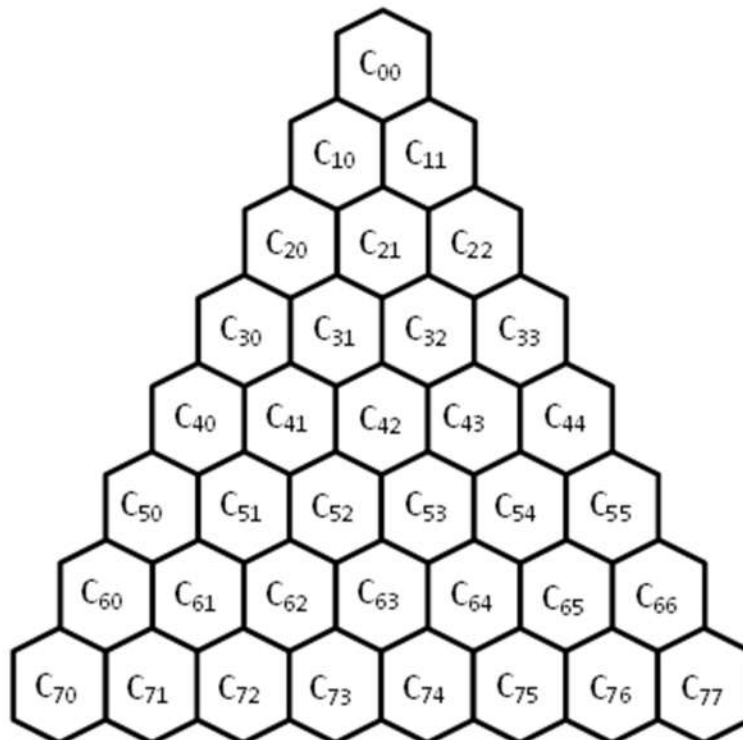
Lograr una mejor comprensión y dominio sobre la aplicación del triángulo de Pascal para la expansión binomial así como para el desarrollo polinomial de expresiones algebraicas basadas en la expansión binomial. Lo antes mencionado se logra a través de la revisión de algunos ejemplos básicos de expansión binomial así como de su integración y aplicación en ejemplos de desarrollo polinomial basado en expansión binomial.

**PALABRAS CLAVE:** Triángulo de Pascal, Expansión binomial

El Triángulo de Pascal o de Tartaglia permite realizar la presentación ordenada de los coeficientes binomiales en forma gráfica mediante un esquema piramidal. Una representación de los primeros ocho niveles de esta pirámide se muestra a continuación.



De forma similar podemos considerar asignar a estos coeficientes una etiqueta del tipo  $C_{ij}$ , en donde  $i$  se asocia con el nivel de la pirámide en tanto que  $j$  se hace corresponder con su orden en dicho nivel, de manera que se tendrá que los coeficientes se hacen corresponder con



Por otro lado, para el caso de un binomio del tipo  $(a + b)$  que se eleva a una potencia  $n$ , en general implica que dicho binomio debe multiplicarse por sí mismo  $n$  veces, tal que

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_n$$

De manera que

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

⋮

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_n$$

Como se puede observar, la potencia del binomio satisface la relación siguiente

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n c_{ni} a^{n-i} b^i$$

En donde se tiene que  $c_{ni}$  se hace corresponder con los elementos del triángulo de Pascal, acorde con lo antes mencionado, de manera tal que  $n$  se hace corresponder con el nivel e  $i$  con el elemento en dicho nivel.

Además, se puede identificar una relación entre las potencias de los elementos del binomio que intervienen en las expresiones resultantes, de manera que la suma de sus exponentes debe ser igual a  $n$  para cada término de dicha suma. Estos términos corresponden con productos de  $a$  por  $b$ , los que se pueden ordenar de izquierda hacia derecha, de forma que para el primer elemento del binomio ( $a$ ) su potencia decrece de  $n$  a 0, en tanto que para el segundo elemento del binomio ( $b$ ) lo hace de forma creciente de 0 a  $n$ .

Similarmente se tendrá que para

$$(a - b)^n = \underbrace{(a - b)(a - b)(a - b) \cdots (a - b)}_n$$

Se satisface la relación siguiente

$$(a - b)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_{ni} a^{n-i} b^i$$

En donde se identifica que debe aparecer una relación de alternancia entre coeficientes positivos y negativos de los elementos involucrados en la expresión resultante de la potencia del binomio.

## EJEMPLOS

Caso 1

$$(x + 2)^6$$

De forma representativa, con propósitos didácticos se construyen todos los resultados que satisfacen la relación

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n c_{ni} a^{n-i} b^i$$

Esto para  $n = 0,1,2,3,4,5,6$ . De manera general se tendrá que en una representación piramidal cada renglón representa el resultante de  $(a + b)^n$ , como se muestra a continuación

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 a + b \\
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
 a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
 \end{array}$$

Para el caso  $(x + 2)^6$  donde  $a = x$  y  $b = 2$ , tendremos pues que

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x + 2 \\
 x^2 + 2x(2) + 2^2 \\
 x^3 + 3x^2(2) + 3(x)2^2 + 2^3 \\
 x^4 + 4x^3(2) + 6x^22^2 + 4x2^3 + 2^4 \\
 x^5 + 5x^4(2) + 10x^32^2 + 10x^22^3 + 5x2^4 + 2^5 \\
 x^6 + 6x^5(2) + 15x^42^2 + 20x^32^3 + 10x^22^4 + 5x2^5 + 2^6
 \end{array}$$

O bien lo que en forma expandida agrupando términos similares

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x + 2 \\
 x^2 + 4x + 4 \\
 x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\
 x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 \\
 x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 90x + 32 \\
 x^6 + 20x^5 + 20x^4 + 80x^3 + 160x^2 + 160x + 64
 \end{array}$$

Por lo tanto se tendrá que

$$(x + 2)^6 = x^6 + 20x^5 + 20x^4 + 80x^3 + 160x^2 + 160x + 64$$

## EJEMPLOS

Caso 2

$$(x + 1 + y)^3$$

De forma representativa, con propósitos didácticos se construyen todos los resultados que satisfacen la relación

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n c_{ni} a^{n-i} b^i$$

Esto para  $n = 0,1,2,3$ . De manera general se tendrá que en una representación piramidal cada renglón representa el resultante de  $(a + b)^n$ , como se muestra a continuación

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 a + b \\
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
 a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
 \end{array}$$

Para el caso  $(x + 1 + y)^3$  donde  $a = x + 1$  y  $b = y$ , tendremos en forma general que

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x + 1 + y \\
 (x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2 \\
 (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2y + 3(x + 1)y^2 + y^3
 \end{array}$$

Resolviendo para cada termino se tendrá de forma desarrollada que

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x + 1 + y \\
 (x^2 + 2x + 1) + (2xy + 2y) + y^2 \\
 (x^3 + 3x^2 + 3x(1)^2 + 1^3) + 3(x^2 + 2x + 1)y + (3xy^2 + 3y^2) + y^3
 \end{array}$$

O bien, lo que en forma desarrollada y agrupando términos similares

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x + 1 + y \\
 x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 \\
 x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2 + 3x^2 + 6xy + 3x + 3y + 1
 \end{array}$$

Por lo tanto

$$(x + 1 + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2 + 3x^2 + 6xy + 3x + 3y + 1$$

Con propósitos didácticos resolveremos desarrollando paso a paso para comprobar el resultado

Tendremos para  $(x + 1 + y)^2$

$$\begin{array}{r} \underline{(x + 1 + y)(x + 1 + y)} \\ x^2 + x + xy \\ + \quad x + 1 + y \\ + \quad xy + y + y^2 \\ \hline x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 \end{array}$$

Y similarmente, haciendo uso del resultado anterior, tendremos para  $(x + 1 + y)^3$

$$\begin{array}{r} \underline{(x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1)(x + 1 + y)} \\ x^3 + xy^2 + 2x^2y + 2x^2 + 2xy + x \\ + \quad x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 \\ + \quad x^2y + y^3 + 2xy^2 + 2xy + 2y^2 + y \\ \hline x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2 + 3y^2 + 6xy + 3x + 3y + 1 \end{array}$$

## EJEMPLOS

Caso 3

$$(x - 2)^4$$

De forma representativa, con propósitos didácticos se construyen todos los resultados que satisfacen la relación

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_{ni} a^{n-i} b^i$$

Esto para  $n = 0,1,2,3,4,5,6$ . De manera general se tendrá que en una representación piramidal cada renglón representa el resultante de  $(a + b)^n$ , como se muestra a continuación

$$\begin{array}{c} 1 \\ (-1)^0 a + (-1)^1 b \\ (-1)^0 a^2 + (-1)^1 2ab + (-1)^2 b^2 \\ (-1)^0 a^3 + (-1)^1 3a^2 b + (-1)^2 3ab^2 + (-1)^3 b^3 \\ (-1)^0 a^4 + (-1)^1 4a^3 b + (-1)^2 6a^2 b^2 + (-1)^3 4ab^3 + (-1)^4 b^4 \end{array}$$

Para el caso  $(x + 2)^6$  donde  $a = x$  y  $b = 2$ , tendremos pues que

$$\begin{array}{c} 1 \\ (-1)^0 x + (-1)^1 2 \\ (-1)^0 x^2 + (-1)^1 2x(2) + (-1)^2 2^2 \\ (-1)^0 x^3 + (-1)^1 3x^2(2) + (-1)^2 3(x)2^2 + (-1)^3 2^3 \\ (-1)^0 x^4 + (-1)^1 4x^3(2) + (-1)^2 6x^2 2^2 + (-1)^3 4x2^3 + (-1)^4 2^4 \end{array}$$

O bien lo que en forma expandida agrupando términos similares

$$\begin{array}{c} 1 \\ x - 2 \\ x^2 - 4x + 4 \\ x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 \end{array}$$

Por lo tanto se tendrá que

$$(x - 2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

## EJEMPLOS

Caso 4

$$(x - 1 - y)^3$$

De forma representativa, con propósitos didácticos se construyen todos los resultados que satisfacen la relación

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n c_{ni} a^{n-i} b^i$$

Esto para  $n = 0, 1, 2, 3$ . De manera general se tendrá que en una representación piramidal cada renglón representa el resultante de  $(a + b)^n$ , como se muestra a continuación

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 a + b \\
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
 a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
 \end{array}$$

Para el caso  $(x - 1 - y)^3$  donde  $a = x - 1$  y  $b = -y$ , tendremos en forma general que

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x - 1 - y \\
 (x - 1)^2 - 2(x - 1)y + y^2 \\
 (x - 1)^3 - 3(x - 1)^2y + 3(x - 1)y^2 - y^3
 \end{array}$$

Resolviendo para cada termino se tendrá de forma desarrollada que

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x + 1 + y \\
 (x^2 - 2x + 1) - (2xy - 2y) + y^2 \\
 (x^3 - 3x^2 + 3x(1)^2 - (1)^3) - 3(x^2 - 2x + 1)y + (3xy^2 - 3y^2) - y^3
 \end{array}$$

O bien, lo que en forma desarrollada y agrupando términos similares

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 x + 1 + y \\
 x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1 \\
 x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3y^2 - 3x^2 + 6xy + 3x - 3y - 1
 \end{array}$$

Por lo tanto

$$(x - 1 - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3y^2 - 3x^2 + 6xy + 3x - 3y - 1$$

Con propósitos didácticos resolveremos desarrollando paso a paso para comprobar el resultado

Tendremos para  $(x - 1 - y)^2$

$$\begin{array}{r} \underline{(x - 1 - y)(x - 1 - y)} \\ x^2 - x - xy \\ + \quad -x + 1 + y \\ + \quad -xy + y + y^2 \\ \hline x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1 \end{array}$$

Y similarmente, haciendo uso del resultado anterior, tendremos para  $(x - 1 - y)^3$

$$\begin{array}{r} \underline{(x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1)(x - 1 - y)} \\ x^3 + xy^2 - 2x^2y - 2x^2 + 2xy + x \\ + \quad -x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 \\ + \quad -x^2y - y^3 + 2xy^2 + 2xy - 2y^2 - y \\ \hline x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 6xy + 3x - 3y - 1 \end{array}$$

## CONCLUSIONES

A través de la revisión de este contenido se logra evidenciar la aplicabilidad del triángulo de Pascal a fin de simplificar el desarrollo o expansión binomial, lo cual es una herramienta particularmente útil para la resolución de problemas algebraicos relacionados con el cálculo de polinomios. Además permite reforzar el conocimiento de algunos tópicos que frecuentemente no se encuentran en los contenidos curriculares y que promueven el fortalecimiento de las habilidades en estudiantes de cualquier nivel educativo.

## REFERENCIAS

- [1] Zill, D.G., Dewar, & J.M., Villarreal (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. McGraw-Hill Interamericana.
- [2] Spiegel, M.R., & Moyer R.E. (2015). *Álgebra superior*. McGraw-Hill Interamericana.