Escuela Superior de Apan

PRECÁLCULO

Licenciatura en Ingeniería en Nanotecnología

EL CÍRCULO UNITARIO, LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Profesores

Arturo Hernández Hernández

Luis Alberto Hernández Hernández

INTRODUCCIÓN

El círculo unitario, las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras se encuentran intrínsecamente relacionados, ya que el circulo unitario proporciona un marco geométrico que permite definir y visualizar las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente), las cuales pueden ser comprendidas a través del teorema de Pitágoras.

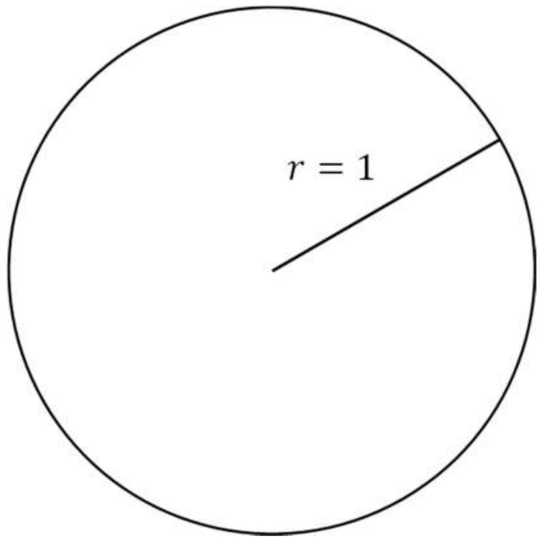
OBJETIVO

Lograr una mejor comprensión y dominio sobre relaciones trigonométricas, particularmente la función seno y coseno, a través del empleo del circulo unitario y el teorema de Pitágoras. Y facilitar el cálculo de un conjunto específico de valores angulares asociados que son frecuentemente empleados.

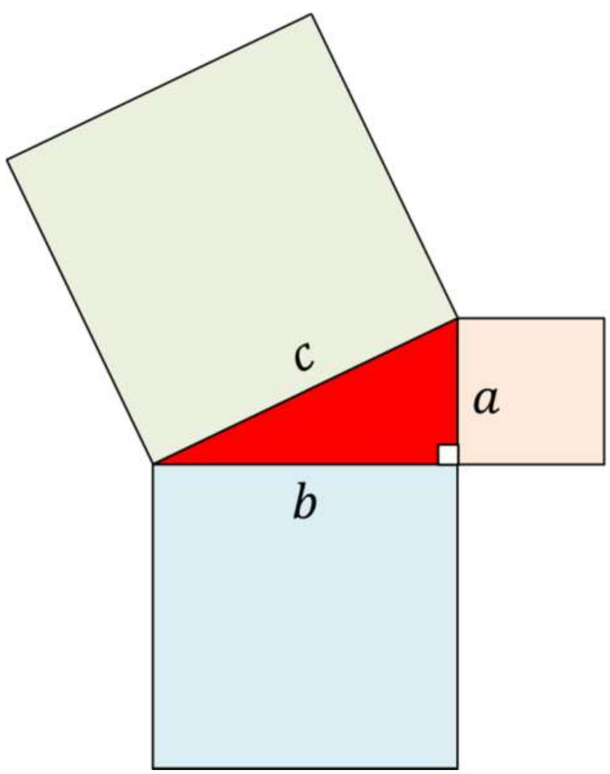
PALABRAS CLAVE: Circulo unitario, razones trigonométricas, teorema de Pitágoras

El círculo unitario puede ser empleado como una herramienta muy útil para determinar magnitudes correspondientes a valores angulares muy específicos (θ), esto a través del empleo de razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

Si partimos de un círculo unitario, es decir de radio unitario $r = 1$, cuya ecuación se hace corresponder con $x^2 + y^2 = 1$, como se muestra a continuación.



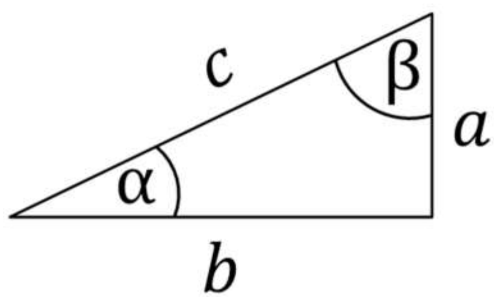
Y considerando el Teorema de Pitágoras, el cual para un triángulo rectángulo, nos permite relacionar la magnitud de las aristas a través de las áreas de los cuadrados definidos por las mismas.



Siguiendo la construcción de la imagen, podemos identificar que la arista de mayor longitud que es opuesta al ángulo recto se denomina hipotenusa (c), en tanto que las otras aristas se denominaran catetos (a, b). De esta manera se puede establecer que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $(c^2 = a^2 + b^2)$, es decir, el teorema de Pitágoras establece que la longitud de la hipotenusa de igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de los catetos, esto es

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ahora bien, de acuerdo con el siguiente esquema en el que se identifican los catetos y la hipotenusa (a, b, c), se pueden etiquetar los ángulos α y β (asignados respectivamente a cada cateto, de forma tal que al ángulo correspondiente a un cateto se encuentre ubicado de manera opuesta a este), tal como se muestra en a continuación



Haciendo uso de las relaciones trigonométricas más comúnmente empleadas, es decir, las funciones seno $(\sin)$ y coseno $(\cos)$ para un ángulo cualesquiera (θ), así como la construcción previa, podemos establecer que

Relación general (θ)	Relación respecto de α	Relación respecto de β
$\sin\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$

Partiendo de estas expresiones podemos establecer relaciones que nos permitan determinar la magnitud de los catetos, de forma tal que, respecto de la magnitud de la hipotenusa (c), tendremos

$$\mathrm{a} = \mathrm{c}(\sin\alpha) = \mathrm{c}(\cos\beta)$$

$$\mathrm{b} = \mathrm{c}(\cos\alpha) = \mathrm{c}(\sin\beta)$$

Ahora bien, si asumimos que la magnitud de la hipotenusa es igual a una unidad $(c = 1)$ al igual que el radio de nuestro círculo unitario tendremos que las expresiones antes enunciadas se reducen a las siguientes

$$a = \sin\alpha = \cos\beta$$

$$b = \cos\alpha = \sin\beta$$

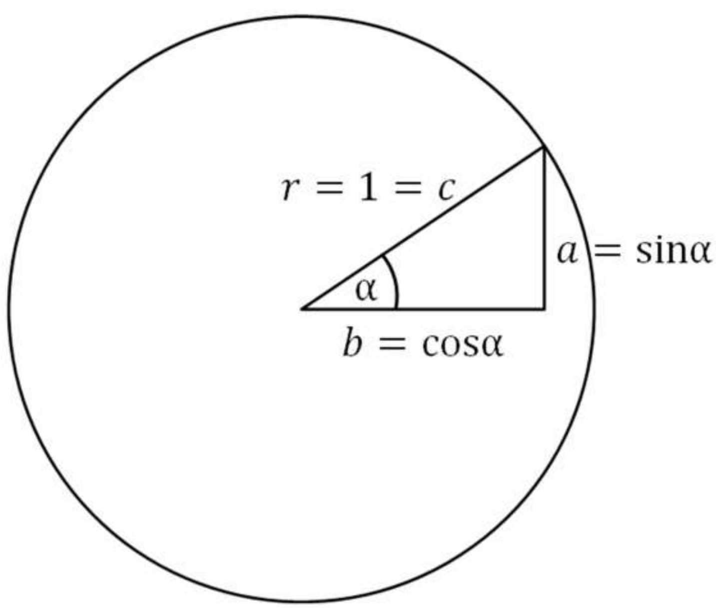
Lo cual, regresando a lo establecido por el teorema de Pitágoras a través de la expresión

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Y haciendo uso de las relaciones que nos permiten calcular la magnitud de los catetos, considerando un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es unitaria $(c = 1)$, podemos reescribir la expresión de manera general para un ángulo cualquiera (θ) como

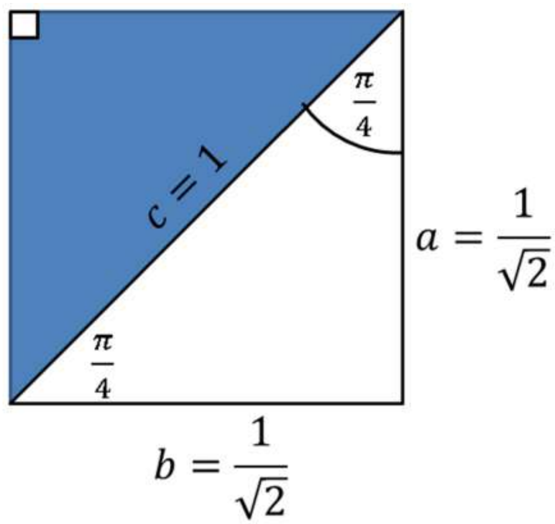
$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

Esta expresión se asocia con la identidad fundamental de la trigonometría o identidad pitagórica. Esta nos permite relacionar el cirulo unitario, las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, para ello inscribimos un triángulo rectángulo dentro del circulo unitario, de manera tal que el radio del circulo unitario coincida con la hipotenusa unitaria de un triángulo rectángulo, esto se representa a continuación



Ahora bien, si consideramos la construcción de triángulos rectángulos a partir de los siguientes casos

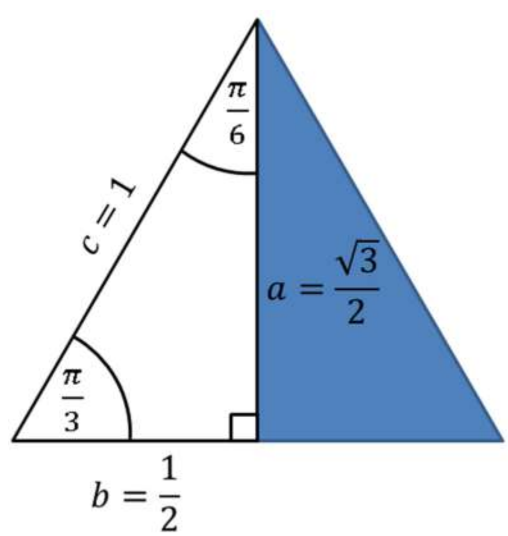
1) Cuadrado de arista de magnitud $\frac{1}{\sqrt{2}}$, asumiendo que empleamos el teorema de Pitágoras, podemos establecer que su diagonal tendrá una magnitud de 1, en tanto que los ángulos que no son rectos tendrán una magnitud de $\frac{\pi}{4}\,rad = 45°$



Así pues, podemos establecer la siguiente relación

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

2) Por otro lado, considerando un triángulo equilátero de arista unitaria y ángulos internos de $\frac{\pi}{3}rad = 60°$, nos permite construir un triángulo rectángulo cuyos ángulos internos tengan magnitudes de $\frac{\pi}{3}rad = 60°$ así como $\frac{\pi}{6}rad = 30°$, como se muestra a continuación

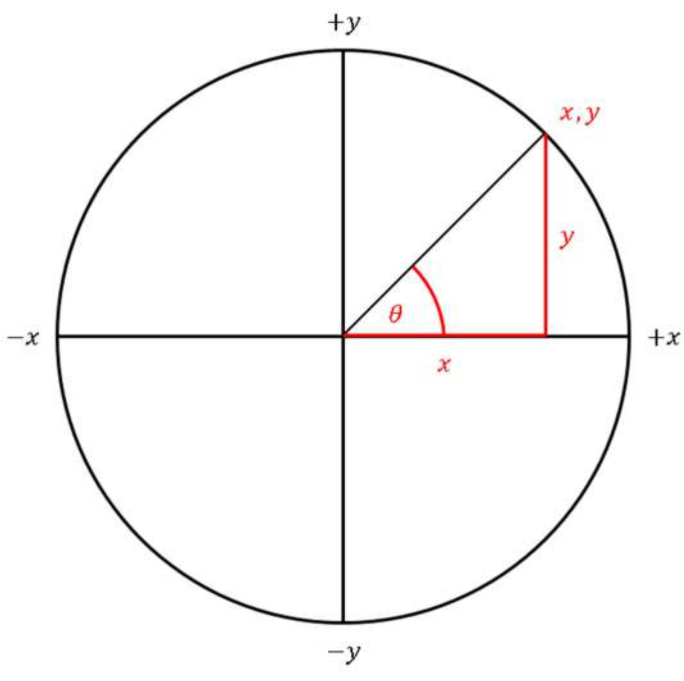


Así pues, podemos establecer las siguientes relaciones

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

En base a los resultados previos, podemos asignar pares ordenados x, y que se relacionan con un valor angular (θ), los cuales se construyen a partir de triángulos rectángulos cuyos catetos definirán estas componentes (como se muestra en la siguiente figura), para este propósito θ será medido en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj a partir de la horizontal



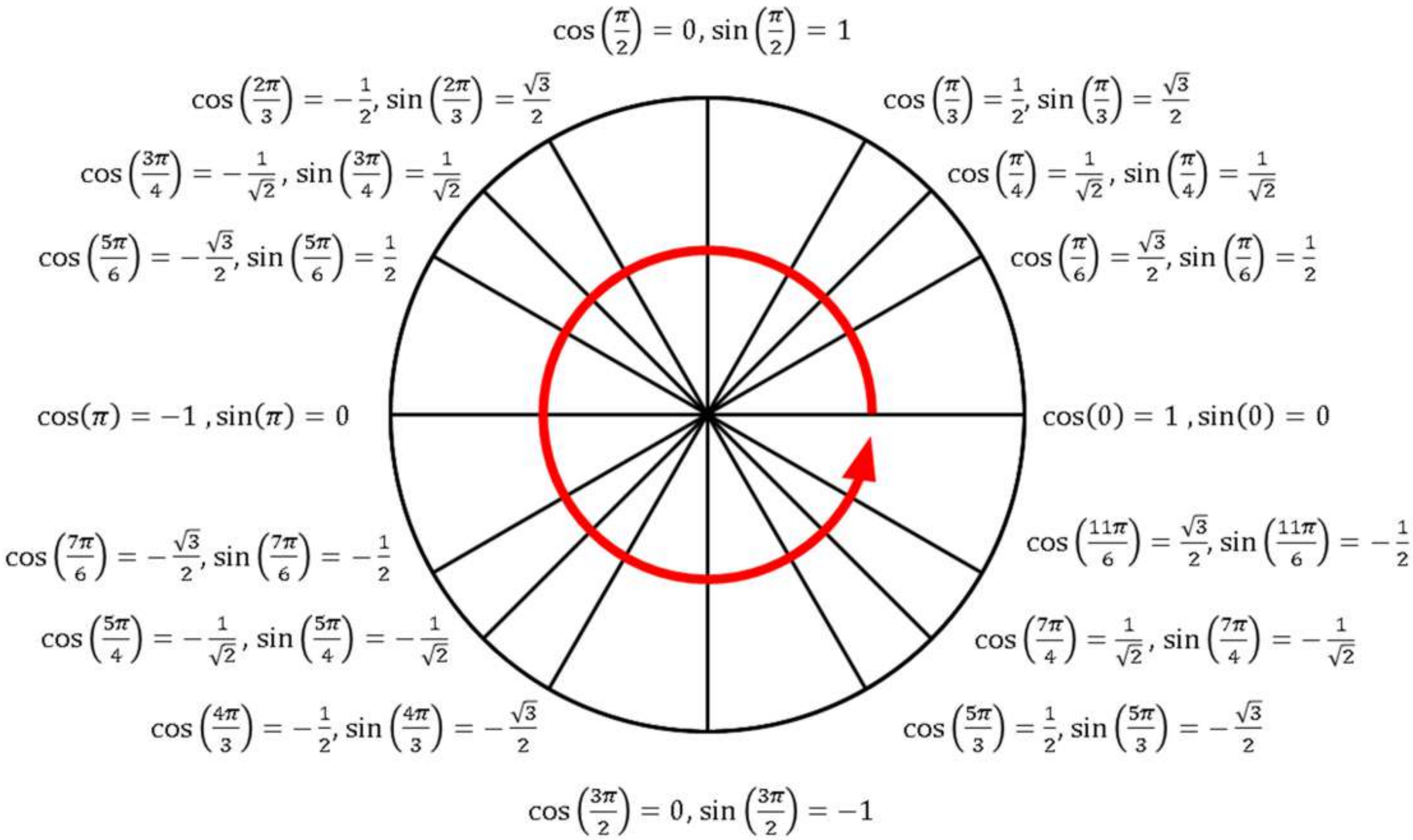
Así pues, podemos establecer algunos valores angulares de interés que son comúnmente empleados, dados por

$$\theta=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\pi,\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{4},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{6},2\pi \quad [rad]$$

Que se hacen corresponder respectivamente con

$$\theta=0,30,45,60,90,120,135,150,180,210,225,240,270,300,315,330,360 \quad [°]$$

Así tendremos pues que, a partir de las relaciones establecidas mediante la construcción del cuadrado unitario y el triángulo equilátero unitario, además de asignar valores positivos y negativos de la forma en que fue descrita previamente, podemos establecer estos pares ordenados x, y en relación a pares $\cos\theta, \sin\theta$. Esto se representa a continuación



CONCLUSIONES

A través de la revisión de este contenido se logra evidenciar la aplicabilidad del teorema de Pitágoras y el círculo unitario a fin de comprender de mejor manera las relaciones trigonométricas, así como para determinar las magnitudes de las funciones seno y coseno que son evaluadas para valores angulares específicos que son frecuentemente empleados. Adicionalmente esto permite reforzar el conocimiento de algunos tópicos que frecuentemente no se encuentran en los contenidos curriculares y que promueven el fortalecimiento de las habilidades en estudiantes de cualquier nivel educativo.

REFERENCIAS

[1] Purcell, E.J., Varberg, D., & Rigdon, S.E. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Pearson Educación.

[2] Zill, D.G., Dewar, & J.M., Villarreal (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. McGraw-Hill Interamericana.

[3] Spiegel, M.R., & Moyer R.E. (2015). *Álgebra superior*. McGraw-Hill Interamericana.